Definice 1 (měřitelné a Lebesgueovsky integrovatelné funkce)**.** *Nezápornou funkci $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ nazveme*

- ***měřitelnou**, pokud existuje neklesající posloupnost nezáporných shodovitých funkcí $\{f_n\}$, že $f_n \to f$ s.v.,*
- ***Lebesgueovsky integrovatelnou**, pokud existuje neklesající posloupnost nezáporných shodovitých funkcí $\{f_n\}$, že $f_n \to f$ s.v., a $\lim_{n\to\infty} \int f_n < \infty$. Pro takovou funkci pak definujeme **Lebesgueův integrál** z f jako*

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n.$$

Prostor všech nezáporných měřitelných funkcí na $\mathbb{R}^d$ označujeme $\mathcal{M}_d^+$, prostor všech nezáporných Lebesgueovsky integrovatelných funkcí na $\mathbb{R}^d$ označujeme $\mathcal{L}_d^+$ Funkci $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ nazveme

- ***měřitelnou**, pokud existují $f_1, f_2 \in \mathcal{M}_d^+$, že $f = f_1 - f_2$,*
- ***Lebesgueovsky integrovatelnou**, pokud existují $f_1, f_2 \in \mathcal{L}_d^+$, že $f = f_1 - f_2$, přičemž definujeme **Lebesgueův integrál** z f jako*

$$\int f = \int f_1 - \int f_2.$$

Poznámky a příklady. *1. pokud $f \in X$ ($X = \mathcal{M}_d$, $\mathcal{M}_d^+$, $\mathcal{L}_d$, nebo $\mathcal{L}^+d$) a $g = f$ s.v., potom $g \in X$. Pokud $X = \mathcal{L}_d, \mathcal{L}_d^+$, potom $\int g = \int f$.*

Lemma 2 (vlastnosti $\mathcal{L}^+$)**.** *Nechť $f, g \in \mathcal{L}^+$, $\alpha, \beta \geq 0$, potom:*

1. *je-li $f \leq g$ s.v. potom $\int f \leq \int g$.*
2. $\max(f,g), \min(f,g), \alpha f + \beta g \in \mathcal{L}^+$.

Lemma 3 (vlastnosti $\mathcal{L}$)**.** *Nechť $f, g \in \mathcal{L}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, potom:*

1. *je-li $f \leq g$ s.v. potom $\int f \leq \int g$.*
2. $\max(f,g), \min(f,g), \alpha f + \beta g, |f| \in \mathcal{L}^+$. *navíc*

$$\int \alpha f + \beta g = \alpha \int f + \beta \int g \quad a \quad \left| \int f \right| \leq \int |f|.$$

Lemma 4 (Leviho věta v $\mathcal{L}^+$)**.** *Nechť pro posloupnost $\{f_n\} \subset \mathcal{L}^+$ platí $f_n \nearrow f$ s.v. a nechť existuje $M \in \mathbb{R}$, že $\int f_n \leq M$, $n \in \mathbb{N}$, potom*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f.$$